Corentin Bergeron ENS Rennes

Leçon 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy
[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algébrie*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier
[Goz] : *Théorie de galois*, Ivan Gozard
[Per] : *Cous d'algèbre*, Daniel Perrin
[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi
[131] : *131 développements pour l'oral*, Didier Lesesvre, Pierre Montagnon

I Partie A - Nombres premiers [Ber] [Rom]

Déf 1 (Nombre premier) :

Thm 2 : Il existe une infinité de nombres premiers.

Ex 3 : Exemples de nombres premiers (257 ...). ([Annexe : Nombres premiers entre 0 et 100]).

Prop 4 : Si $n \in \mathbb{N}$, alors n possède un diviseur premier, et il peut être choisi entre 2 et $\sqrt{n}$.

App 5 : Premier algorithme naïf.

Thm 6 (Décomposition en facteurs premiers) :

App 7 : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ sont irrationnels.
App 8 : PGCD et PPCM de deux nombres.

Thm 9 (Dirichlet faible) :

Thm 10 (Fermat) :

Déf 11 (Nombres de Carmichaël) :

Ex 12 : 561 est de Carmichaël.

App 13 (Test de primavilté via Fermat) :

II Partie B - Corps de nombres [Goz] [Ber]

II.1 Nombres algébriques

Déf 14 (Élément algébrique, polynôme minimal) :

Ex 15 : e, π sont transcendants. $(e\pi)$ ou $(\pi + e)$ sont transcendants.

Ex 16 : $\mathbb{Q}(j)$ est de degré 3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est de degré 2.

Déf 17 ($\overline{\mathbb{Q}}$) :

Prop 18 : $\overline{\mathbb{Q}}$ est algébriquement clos.

Prop 19 : x est algébrique ssi $K[x] = K(x)$ ssi $[K[x] : K] < +\infty$.

Rem 20 : Isomorphisme entre $K[x]$ et $K[X]/\pi_x$.

Thm 21 (Approximation diophantienne) :

Ex 22 : Prendre $\sqrt[3]{17}$ ou autre et calculer la constante à l'aide de P'.

Déf 23 (Nombre de Liouville) :

App 24 (Transcendance des nombres de Liouville) :
Rem 25 : Indénombrabilité des nombres de Liouville

Déf 26 (Entiers algébriques) :

Prop 27 : Les entiers algébriques forment un anneau.

Ex 28 : Les exemples habituels.

Prop 29 : $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

II.2 Corps de nombres

Déf 30 (Corps de nombres) :

Déf 31 (Corps cyclotomiques) :

Prop 32 : $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$

Ex 33 :

App 34 : $\mu_n(\mathbb{C}) \subset \overline{\mathbb{Z}}$.

Thm 35 (Intersection de corps cyclotomiques) :

Dév 36 (Kronecker-Weber) :

III Partie C - Constructibilité [Goz] [Ber]

Déf 37 (Points constructibles à partir d'un ensemble) :

Ex 38 : Constructions géométriques ([Goz]).

Déf 39 (Nombres constructibles) :

Thm 40 : L'ensemble des nombres constructibles forme un corps, stable par racine carrée.

App 41 : Quelques exemples de nombres constructibles.

Thm 42 (Wantzel) :

App 43 : $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible + duplication du cube.

Déf 44 (Polygone constructible) :

Thm 45 (Gauss-Wantzel) :

Ex 46 : Le pentagone est constructible.

IV Partie D - Des anneaux en long en large et en travers

IV.1 Cas non factoriel

Prop 47 : Si $d \equiv 1[4]$, et si d est sans facteurs carrés, alors $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos.

App 48 : $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas factoriel si $d \equiv 1[4]$, sans facteurs carrés

Prop 49 : Si $n \leq 3$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ n'est pas factoriel.

IV.2 Cas principal [Ber] [Per]

Prop 50 : L'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ est principal.

Prop 51 (Critère pour être euclidien) :

App 52 : $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ n'est pas euclidien.

IV.3 Cas euclidien [Ber] [131] [Cal-Per]

Thm 53 : $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[j]$ sont euclidiens.

Dév 54 (Équation de Mordell) :

Prop 55 : Inversibles de ces anneaux.

Prop 56 : p est somme de carrés ssi p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

App 57 : p est somme de carrés ssi $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.